Formelsammlung Mathematik für Gymnasien

https://formel-vetter.jimdo.com

Druckempfehlung: Broschürendruck A5 mit Sattelheftung

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

Zahlen- mengen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}\}$ Menge der **rationalen Zahlen** (Brüche) $\mathbb{R} =$ reelle Zahlengerade Menge der **reellen Zahlen** (Kommazahlen) $\mathbb{C} = \{a + i\,b \mid a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\} =$ komplexe Zahlenebene Menge der **komplexen Zahlen**
Binomi- scher Lehrsatz	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$ $(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Fakul- täten, Binomial- koeffi- zienten	**Fakultäten** $n! = n$ Fakultät $= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ $0! = 1$ **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k} = n$ tief $k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\binom{n}{0} = 1$ Symmetrieeigenschaft $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Quadra- tische Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0$ **Lösungen** $\hookrightarrow x_{1,2} = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Für $d =$ **Diskriminante** $= b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{zwei Lösungen} \\ = 0 & \Rightarrow \text{eine Lösung} \\ < 0 & \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{cases}$ **Satz von Vieta** $\boxed{1}$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\boxed{2}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
Produkt- ansatz	Es ist die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Lässt sich die linke Seite **faktorisieren**, also als $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots f_n(x) = 0$ schreiben, so gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow (f_1(x) = 0$ oder $f_2(x) = 0$ oder $\ldots$ oder $f_n(x) = 0)$ Die **Lösungsmenge** von $f(x) = 0$ ist also die **Vereinigung** der Lösungsmengen der n einfacheren Gleichungen $f_i(x) = 0$ für $i = 1, \ldots n$.

Potenzgesetze

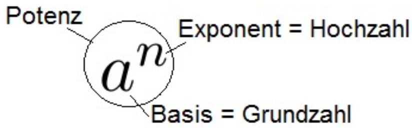
$\boxed{1}$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\boxed{2}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\boxed{3}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$\boxed{4}$ $(ab)^m = a^m b^m$

$\boxed{5}$ $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$



Folgerungen

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
- $a^{1/2} = \sqrt{a}$
- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$
- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
- $a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Kombinierte Gesetze

- $\boxed{1}$-$\boxed{2}$ $\frac{a^2 \cdot a^3}{a^5 \cdot a^{-2}} = a^{2+3-5-(-2)} = a^{2+3-5+2} = a^2$
- $\boxed{3}$-$\boxed{5}$ $(-\frac{2ab^2}{3c^3})^4 = +\frac{2^4 a^4 b^8}{3^4 c^{12}}$

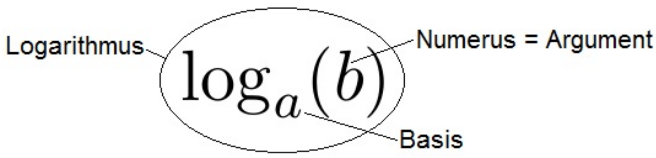
Logarithmengesetze

$\boxed{1}$ $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$

$\boxed{2}$ $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$

$\boxed{3}$ $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$

$\boxed{4}$ **Basiswechsel** $\log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}$



Eigenschaften / Folgerungen

- $\log_a(b)$ beantwortet die Frage $a^? = b$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a$ und a^{hoch} sind gegenseitige Umkehrfunktionen.

$\hookrightarrow \log_a(a^x) = x$ und $\hookrightarrow a^{\log_a(x)} = x$

- $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$

- $\ln(x) = \log_e(x)$ — **Natürlicher Logarithmus**, $e =$ **Eulersche Zahl** $= 2.718\ldots$
- $\log(x) = \lg(x) = \log_{10}(x)$ — **Zehnerlogarithmus**

Kombiniertes Gesetz

$\boxed{1}$-$\boxed{3}$ $\log_a(\frac{2a^2 b}{3c^4}) = \log_a(2) + 2\log_a(a) + \log(b) - \log_a(3) - 4\log_a(c)$

Arithmetische Zahlenfolge

$a_{n+1} = a_n + d$ — **Rekursive Darstellung**

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ — **Explizite Darstellung**

$a_n = a_m + (n-m) \cdot d$

$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \frac{d}{2}) \cdot n$ — **Summenformel**

Geometrische Zahlenfolge	$a_{n+1} = a_n \cdot q$ **Rekursive Darstellung** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ **Explizite Darstellung** $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$ $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ **Summenformel** $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ existiert für $-1 < q < 1$ **'Unendliche Reihe'**
Summen spezieller Reihen	$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad$ $\sum\limits_{k=m}^{n} k = \dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad$ $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \dfrac{q(q^n-1)}{q-1}$ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad$ $\sum\limits_{k=1}^{n} kq^k = \dfrac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(q-1)^2}$
Exponentielles Wachstum/ Zerfall	$y = a \cdot q^t$ und $q = 1 + p$ bzw. $q = e^r$ Legende $y =$ Endwert; $a =$ Anfangswert; $q =$ **Wachstumsfaktor** pro Periode; $t =$ Zeit in Perioden; $p =$ effektive **Zuwachsrate** pro Periode. $r =$ **stetige Zuwachsrate** pro Periode. **Wachstumsfaktor für z Perioden** $\hookrightarrow q^z$ **Verdoppelungszeit** $(q > 1)$ $\hookrightarrow T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(q)} \approx \dfrac{70\%}{p}$ **Halbwertszeit** $(q < 1)$ $\hookrightarrow T_{1/2} = -\dfrac{\ln(2)}{\ln(q)} \approx \dfrac{70\%}{-p}$
Lineares Wachstum	$y = a \cdot (1 + p \cdot t)$ Legende $y =$ Endwert; $a =$ Anfangswert; $p =$ Zuwachssrate* pro Periode; $t =$ Zeit in Perioden. *relativ zu Anfangswert a.
Zinses-Zins	$q = 1 + p$ **Aufzinsfaktor** (pro Jahr) q, effektiver Jahreszinssatz p $K_n = K_0 \cdot q^n$ **Aufzinsen** um n Jahre $K_0 = \dfrac{K_n}{q^n}$ **Abzinsen** um n Jahre
Renten	siehe unten

Renten:

Zahlungsperiode ...	1 Jahr	z Jahre
Wert auf ersten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \dfrac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}}$	$W = R \cdot \dfrac{1-q^{-n\cdot z}}{1-q^{-z}}$
Wert auf letzten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$	$W = R \cdot \dfrac{q^{n\cdot z} - 1}{q^z - 1}$

Legende $R =$ Rentenrate, $q =$ Aufzinsfaktor (pro Jahr),
$n =$ Anzahl Rentenratenzahlungen,
$z =$ Zahlungsperiode (in Jahren), z.B. $z = \frac{1}{12}$ für monatlich.

2 Trigonometrie

Winkelmass

Gradmass (deg) Voller Winkel $= 360°$

Bogenmass (rad) Voller Winkel $= 2\pi$ $\qquad$ $\pi =$ Kreiszahl Pi $= 3.141592653\ldots$

$b = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = b \cdot \frac{180°}{\pi}$

Legende $b =$ Winkel im Bogenmass; $\alpha =$ Winkel im Gradmass

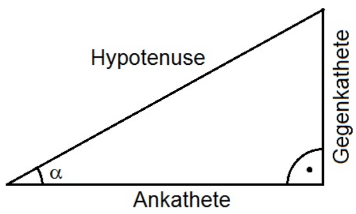
Trigonometrische Funktionen

1) **Definition** für $0° < \alpha < 90°$ am '**Rechtwinkligen Dreieck**'.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

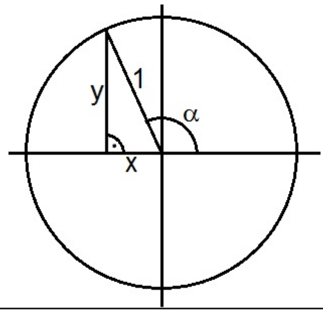


2) **Definition** für beliebiges α am '**Einheitskreis**'.

$$\cos(\alpha) = x$$

$$\sin(\alpha) = y$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$



Werte für spezielle Winkel

α	$0°$	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$\pm 90°$	$\pm 120°$	$\pm 135°$	$\pm 150°$	$180°$
b	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	n.d.	$\mp\sqrt{3}$	∓ 1	$\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Trigonometrische Identitäten

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Symmetrie ($\frac{\pi}{2}$[rad] $= 90°$[deg] ; π[rad] $= 180°$[deg]):

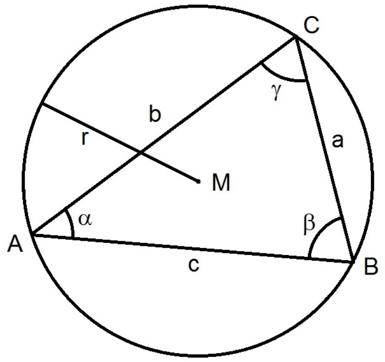
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp\frac{1}{\tan(\alpha)}$
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin(\alpha)$	$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm\tan(\alpha)$

Periodizität (π[rad] $= 180°$[deg] ; 2π[rad] $= 360°$[deg]):

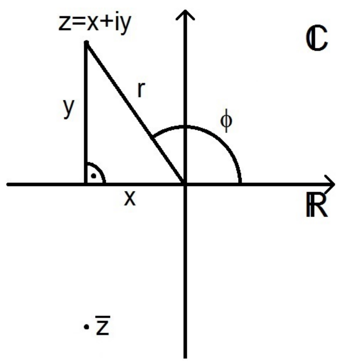
$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

Summen, Differenzen, doppelte und halbe Winkel

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$	$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$	$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

Allgemeines Ebenes Dreieck	1) **Winkelsumme** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ 2) **Sinussatz** $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$ und $(*)$ bzw. $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ und $(*)$. 3) **Cosinussatz** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ und $(*)$. 4) **Umkreisradius** $r = \frac{a}{2\sin(\alpha)}$ und $(*)$. 5) **Fläche** $A = \frac{ab\sin(\gamma)}{2}$ und $(*)$. $(*)$ = 'zyklisch vertauscht' 

3 Komplexe Zahlen

Definition und Darstellungen	Die **Imaginäre Einheit** i erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$ **Karthesische Form** $z = x + iy$ **Polarform** $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ dafür schreibt man auch kurz $z = r\,\text{cis}\,\phi$ **Eulersche Relation** $z = re^{i\phi}$ ϕ im Bogenmass! **Konjugiert komplexe Zahl** $\overline{z} = x - iy = r(\cos\phi - i\sin\phi) = r\,\text{cis}\,(-\phi) = re^{-i\phi}$ 
Rechenoperationen	**Addition** $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ **Subtraktion** $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ **Multiplikation** $z_1 \cdot z_2 = r_1\,\text{cis}\,\phi_1 \cdot r_2\,\text{cis}\,\phi_2 = r_1 r_2\,\text{cis}\,(\phi_1 + \phi_2)$ **Division** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\text{cis}\,\phi_1}{r_2\,\text{cis}\,\phi_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\text{cis}\,(\phi_1 - \phi_2)$ **Potenz** $z^n = (r_1\,\text{cis}\,\phi)^n = r_1^n\,\text{cis}\,(n\phi)$ **Wurzel** $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,\text{cis}\,\phi} = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\,(\frac{\phi + 2\pi k}{n})$, für $k = 0, \ldots, n-1$ Im **Gradmass** natürlich analog ... **Wurzel** $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,\text{cis}\,\phi} = \sqrt[n]{r}\,\text{cis}\,(\frac{\phi + 360°k}{n})$, für $k = 0, \ldots, n-1$ **Fundamentalsatz** der Algebra: Jede Polynomgleichung n-ten Grades $a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen.

4 Planimetrie

<table>
<tr><td>Dreieck rechtwinklig</td><td>

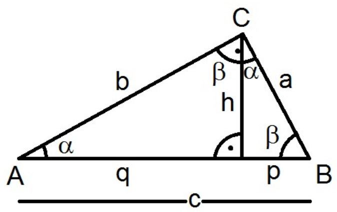
Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz $h^2 = pq$

Kathetensatz $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$

Flächensatz $ab = hc$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>Dreieck gleichseitig</td><td>

Umfang $u = 3s$

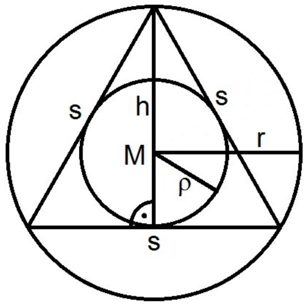
Höhe $h = \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$

Fläche $A = \dfrac{s^2\sqrt{3}}{4}$

Umkreisradius $r = \dfrac{s\sqrt{3}}{3}$

Inkreisradius $\rho = \dfrac{s\sqrt{3}}{6}$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>Dreieck allgemein</td><td>

Siehe auch Trigonometrie!

Umfang $u = a + b + c$

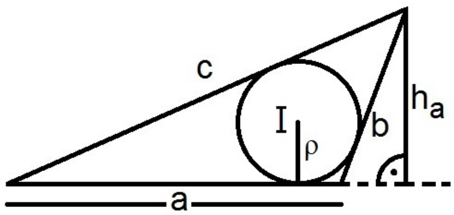
Fläche $A = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$

Die **Formel von Heron**

Fläche $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, mit $s = \dfrac{u}{2}$

Inkreisradius $\rho = \dfrac{A}{s} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

</td><td>



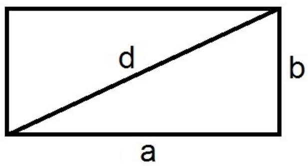
</td></tr>
<tr><td>Rechteck</td><td>

Umfang $u = 2a + 2b$

Fläche $A = ab$

Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

</td><td>



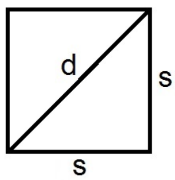
</td></tr>
<tr><td>Quadrat</td><td>

Umfang $u = 4s$

Fläche $A = s^2$

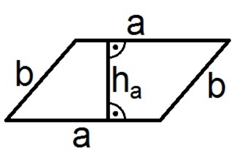
Diagonale $d = s\sqrt{2}$

</td><td>

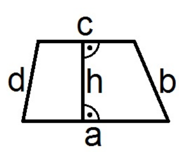


</td></tr>
<tr><td>Weitere Vierecke</td><td colspan="2">

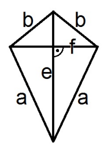
<table>
<tr><td>Name</td><td>Parallelogramm</td><td>Trapez</td><td>Drachen</td></tr>
<tr><td></td><td>



</td><td>

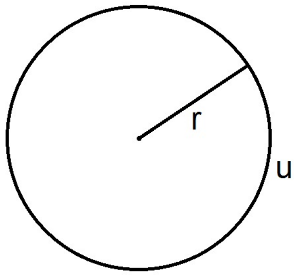


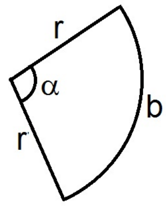
</td><td>

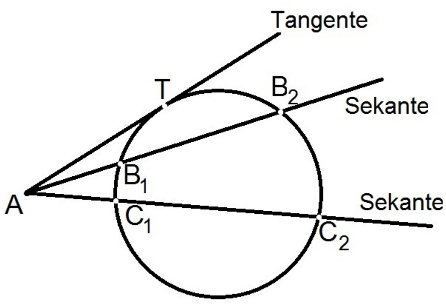


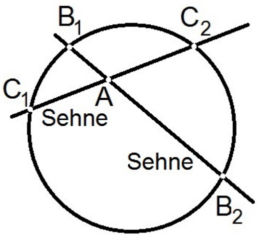
</td></tr>
<tr><td>Umfang</td><td>$u = 2a + 2b$</td><td>$u = a + b + c + d$</td><td>$u = 2a + 2b$</td></tr>
<tr><td>Fläche</td><td>$A = a \cdot h_a$</td><td>$A = \dfrac{a+c}{2} \cdot h$</td><td>$A = \dfrac{e \cdot f}{2}$</td></tr>
</table>

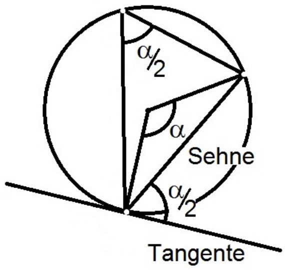
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Kreis 1</td>
<td>
Umfang $u = 2\pi r$
Fläche $A = \pi r^2$
Sektorfläche $A = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$
Sektorbogenlänge $b = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$




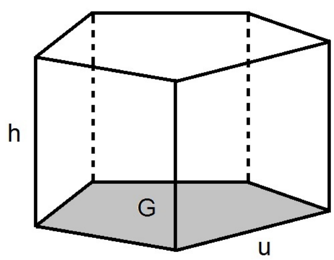
Maximal-/Minimaleigenschaft
Der Kreis ist die Figur, die bei vorgegebenem Umfang maximale Fläche hat.
Der Kreis ist die Figur, die bei vorgegebener Fläche minimalen Umfang hat.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Kreis 2</td>
<td>
Sekantensatz $\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2} = \overline{AT}^2$
Sehnensatz $\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}$
Peripheriewinkelsatz
$\hookrightarrow$ Peripheriewinkel = Sehnentangentenwinkel = $\dfrac{\text{Zentriwinkel}}{2}$


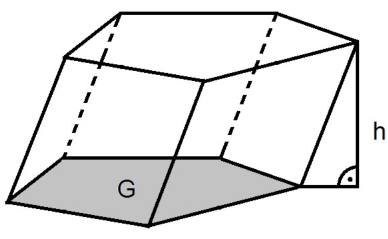
Sekantensatz


Sehnensatz


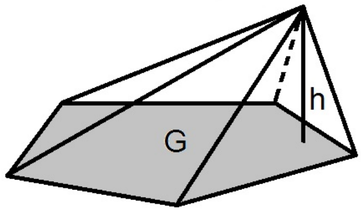
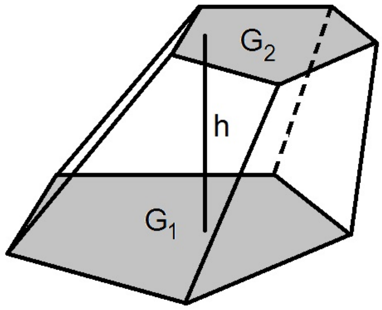
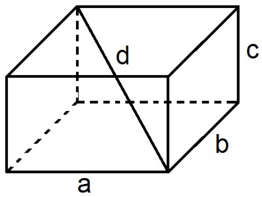
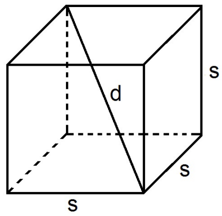
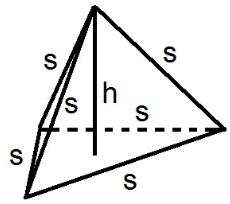
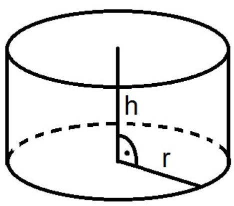
Peripheriewinkelsatz
</td>
</tr>
</table>

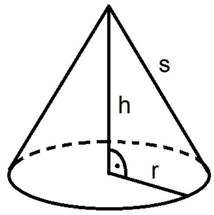
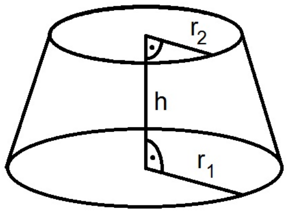
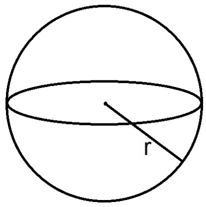
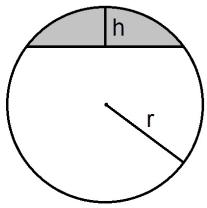
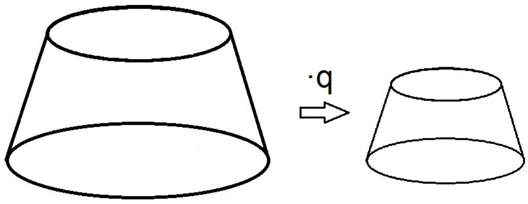
5 Stereometrie

<table>
<tr>
<td>Prisma</td>
<td>
Volumen $V = G \cdot h$
Legende G = Flächeninhalt Grundfläche;
h = Körperhöhe.
Die Formel gilt auch für schiefe Prismen!
Mantelfläche $M = u \cdot h$
Legende u = Umfang Grundfläche;
h = Körperhöhe.
Die Formel gilt nicht für schiefe Prismen!
Für schiefe Prismen: M zusammensetzen
aus Parallelogrammen!
Oberfläche $O = 2G + M$
Legende G = Grundfläche; M = Mantelfläche.
Die Formel gilt auch für schiefe Prismen!


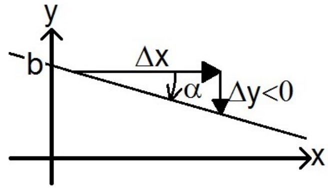
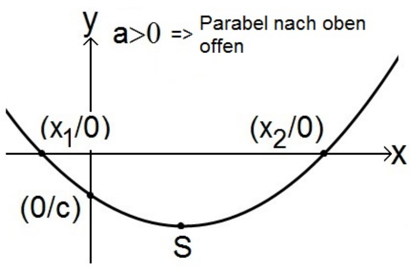
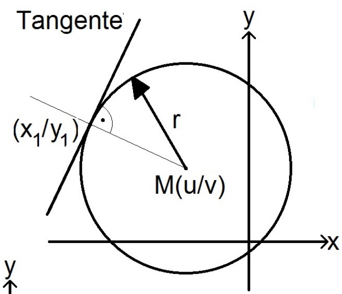
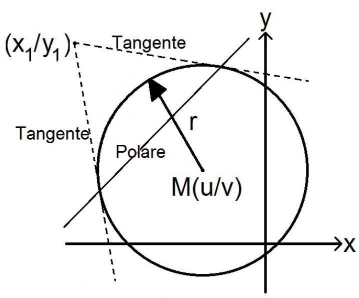


</td>
</tr>
</table>

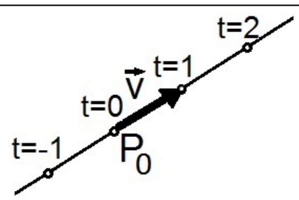
Pyramide	**Volumen** $V = \dfrac{G \cdot h}{3}$ Legende $G =$ Flächeninhalt Grundfläche; $h =$ Körperhöhe. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramiden!* **Mantelfläche** M zusammensetzen aus Dreiecken! **Oberfläche** $O = G + M$ Legende $G =$ Grundfläche; $M =$ Mantelfläche. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramiden!*	
Pyramiden-stumpf	**Volumen** $V = \dfrac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$ Legende $G_1 =$ Grundfläche; $G_2 =$ Deckfläche; $h =$ Körperhöhe. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramidenstümpfe!* **Mantelfläche** M zusammensetzen aus Trapezen! **Oberfläche** $O = G_1 + G_2 + M$ Legende $G_1 =$ Grundfläche; $G_2 =$ Deckfläche; $M =$ Mantelfläche. *Die Formel gilt auch für schiefe Pyramidenstümpfe!*	
Quader	**Volumen** $V = abc$ **Oberfläche** $O = 2ab + 2ac + 2bc$ **Raumdiagonale** $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	
Würfel	**Volumen** $V = s^3$ **Oberfläche** $M = 6s^2$ **Raumdiagonale** $d = s\sqrt{3}$	
Tetraeder	**Körperhöhe** $h = s \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **Volumen** $V = \dfrac{s^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$ **Oberfläche** $O = s^2 \cdot \sqrt{3}$	
Gerader Kreis-zylinder	**Volumen** $V = r^2 \pi h$ **Mantelfläche** $M = 2\pi r h$ **Oberfläche** $O = 2\pi r(r + h)$	

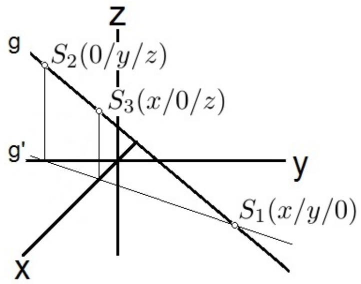
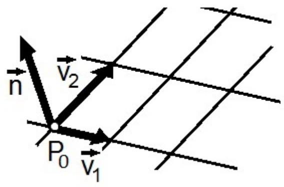
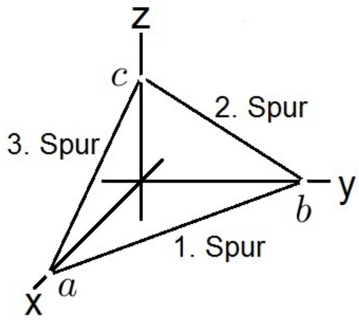
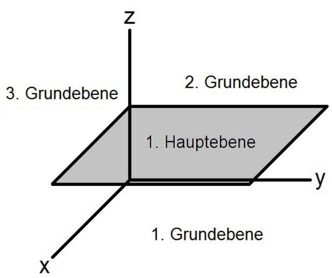
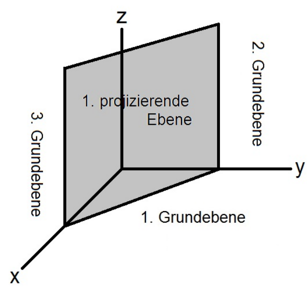
Gerader Kreiskegel	**Volumen** $V = \dfrac{r^2 \pi h}{3}$ **Seitenlinie** $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ **Mantelfläche** $M = \pi r s$ **Oberfläche** $O = \pi r(r + s)$	
Gerader Kreiskegel-stumpf	**Volumen** $V = \dfrac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ **Seitenlinie** $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$ **Mantelfläche** $M = \pi s(r_1 + r_2)$ **Oberfläche** $O = \pi \cdot (r_1^2 + (r_1 + r_2)s + r_2^2)$	
Kugel	**Volumen** $V = \dfrac{4 \pi r^3}{3}$ **Oberfläche** $O = 4 \pi r^2$ **Maximal-/Minimaleingeschaft** Die Kugel ist der Körper mit grösstem Volumen bei gegebener Oberfläche. Die Kugel ist der Körper mit kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen.	
Kugel-segment	**Volumen** $V = \dfrac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$ **Mantelfläche** $M = 2 \pi r h$ **Oberfläche** $O = \pi h(4r - h)$	
Streckungen	Wird ein Körper mit dem Faktor q gestreckt/gestaucht, dann ändern sich **Längen** mit Faktor q **Flächen** mit Faktor q^2 **Volumen** mit Faktor q^3	

6 Analytische Geometrie der Ebene

Gerade	**Hauptform** $y = mx + b$ Legende m = Steigung; b = y-Achsenabschnitt  **Steigung** $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = Differenzenquotient **Punkt-Steigungsform** $y = m(x - x_1) + y_1$ Legende m = Steigung; (x_1/y_1) = Punkt auf der Gerade **Steigungswinkel** = Winkel gegen positive x-Achse = $\alpha = \arctan(m)$ Zwei Geraden sind **parallel** $\Leftrightarrow m_1 = m_2$ Zwei Geraden sind **senkrecht** $\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ **Winkel** zwischen zwei Geraden $\hookrightarrow \min(\alpha, 180° - \alpha)$, mit $\alpha = \lvert \arctan(m_2) - \arctan(m_1) \rvert$ --- **Normalform** $ax + by + c = 0$ Legende $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = Normalenvektor = Vektor senkrecht zur Geraden
Parabel	**Hauptform** $y = ax^2 + bx + c$ Legende a = Öffnungsparamter; c = y-Achsenabschnitt  **Nullstellen** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **Scheitelpunkt** $S(-\dfrac{b}{2a} \ / \ c - \dfrac{b^2}{4a})$ **Scheitelform** $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ Legende a = Öffnungsparameter; (x_s/y_s) = Scheitel der Parabel **Nullstellenform** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ Legende a = Öffnungsparameter; x_1, x_2 = Nullstellen
Kreis	**Hauptform** $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  **Mittelpunkt** $M(-\dfrac{a}{2} \ / -\dfrac{b}{2})$ **Radius** $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ **Mittelpunktsform** $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ Legende (u/v) = Mittelpunkt; r = Radius  **Tangente** im Kreispunkt (x_1/y_1) $\hookrightarrow (x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2$ Legende (u/v) = Mittelpunkt; r = Radius **'Polare'** zum Punkt (x_1/y_1) $\hookrightarrow (x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2$ Legende (u/v) = Mittelpunkt; r = Radius

7 Vektorgeometrie (im Raum)

Grund- begriffe	**Ortsvektor** von Punkt $A(x/y/z)$ $\hookrightarrow \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **Vektor** von A nach B $\hookrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$ **Neuer Punkt** = Startpunkt + Vektorkombination **Betrag** eines Vektors = Länge des Vektors $\hookrightarrow \lvert\overrightarrow{v}\rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\hookrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$ Es gilt $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \lvert\overrightarrow{v}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{w}\rvert \cdot \cos\alpha$; α = Zwischenwinkel. Es gilt $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \lvert\overrightarrow{v}\rvert^2$ Es gilt $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\hookrightarrow \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$ Es gilt $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow v \parallel w$ Es gilt $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{v}$ und senkrecht auf $\overrightarrow{w}$ Es gilt $\lvert\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\rvert$ = Fläche des von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ aufgespannten Parallelogrammes $= \lvert\overrightarrow{v}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{w}\rvert \cdot \sin\alpha$; α = Zwischenwinkel **Winkel** zwischen zwei Vektoren $\hookrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\lvert\overrightarrow{v}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{w}\rvert}$ **Winkelhalbierender Vektor** zweier Vektoren $\hookrightarrow \dfrac{\overrightarrow{v}}{\lvert\overrightarrow{v}\rvert} + \dfrac{\overrightarrow{w}}{\lvert\overrightarrow{w}\rvert}$ **Vektor der Länge** ℓ $\hookrightarrow \dfrac{\ell}{\lvert\overrightarrow{v}\rvert} \cdot \overrightarrow{v}$ **Fläche des Dreiecks** aufgespannt durch zwei Vektoren $\hookrightarrow \dfrac{\lvert\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\rvert}{2}$ **Mittelpunkt** einer Strecke $\overline{AB}$ $\hookrightarrow \overrightarrow{M} = \dfrac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}}{2}$ **Teilpunkt** Verhältnis $a : b$ einer Strecke $\overline{AB}$ $\hookrightarrow \overrightarrow{T} = \dfrac{b \cdot \overrightarrow{A} + a \cdot \overrightarrow{B}}{a + b}$ **Schwerpunkt** eines Dreiecks ABC $\hookrightarrow \overrightarrow{S} = \dfrac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{3}$ --- Länge der **Komponente** eines Vektors $\overrightarrow{v}$ $\boxed{1}$ parallel zur Richtung $\overrightarrow{b}$ $\hookrightarrow \dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{b}}{\lvert\overrightarrow{b}\rvert}$ $\boxed{2}$ senkrecht zur Richtung $\overrightarrow{b}$ $\hookrightarrow \dfrac{\lvert\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{b}\rvert}{\lvert\overrightarrow{b}\rvert}$
Gerade	**Parameterform** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_0} + t \cdot \overrightarrow{v}$ Legende $\overrightarrow{P_0}$ = Ortsvektor des Fusspunktes P_0; $t \in \mathbb{R}$ Parameter; $\overrightarrow{v}$ = Richtungsvektor 

Spurpunkte	Die **Spurpunkte** einer Geraden sind ihre Schnittpunkte mit den 3 Koordinatenebenen xy-Ebene ($z = 0$), yz-Ebene ($x = 0$) und xz-Ebene ($y = 0$): 1. Spurpunkt $S_1(x/y/0)$, 2. Spurpunkt $S_2(0/y/z)$, 3. Spurpunkt $S_3(x/0/z)$. 
Ebene	**Parameterform** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_0} + t_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + t_2 \cdot \overrightarrow{v_2}$ Legende $\overrightarrow{P_0}$ = Ortsvektor des Fusspunktes P_1; $t, s \in \mathbb{R}$ Parameter; $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ = Richtungsvektoren. **Koordinatenform** $Ax + By + Cz + D = 0$ Legende $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ = Normalenvektor.  **Übergang** Parameterform zu Koordinatenform $\boxed{1}$ $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, $\boxed{2}$ D findet man durch Einsetzen von Fusspunkt P_1. **Hessesche Normalform** $\dfrac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ Legende $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ = Normalenvektor. **Abschnittsform** $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ Legende a = x-Achsenabschnitt; b = y-Achsenabschnitt; c = z-Achsenabschnitt.  Die Schnittgeraden einer Ebene mit den drei Koordinatenebenen heissen die drei Spurgeraden oder **Spuren** der Ebene.
Spezielle Lagen von Ebenen	**Koordinatenebenen** = **Grundebenen** 1. Grundebene = xy-Ebene $\hookrightarrow z = 0$ 2. Grundebene = yz-Ebene $\hookrightarrow x = 0$ 3. Grundebene = xz-Ebene $\hookrightarrow y = 0$ **Hauptebenen** 1. Hauptebene $\parallel$ xy-Ebene $\hookrightarrow z + D = 0$ 2. Hauptebene $\parallel$ yz-Ebene $\hookrightarrow x + D = 0$ 3. Hauptebene $\parallel$ xz-Ebene $\hookrightarrow y + D = 0$  **Projizierende Ebenen** 1. Projizierende Ebene $\perp$ xy-Ebene $\parallel$ z-Achse $\hookrightarrow Ax + By + D = 0$ 2. Projizierende Ebene $\perp$ yz-Ebene $\parallel$ x-Achse $\hookrightarrow By + Cz + D = 0$ 3. Projizierende Ebene $\perp$ xz-Ebene $\parallel$ y-Achse $\hookrightarrow Ax + Cz + D = 0$ 
Bezeichnungen für die folgenden Abschnitte	Punkte Q bzw. Q_1 und Q_2 Geraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P} + t \cdot \overrightarrow{v}$ bzw. $g_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_1} + t \cdot \overrightarrow{v_1}$ und $g_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{P_2} + t \cdot \overrightarrow{v_2}$ Ebenen $E\colon\ Ax + By + Cz + D = 0$, Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ bzw. $E_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ und $E_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$

Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum	**Zwei Geraden** g_1 und g_2 sind *Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.* (1) **zusammenfallend**, falls ihre R'Vektoren parallel sind und P_2 auf g_1 liegt. (2) **echt parallel**, falls ihre R'Vektoren parallel sind und P_2 nicht auf g_1 liegt. (3) **schneidend**, falls ihre R'Vektoren nicht parallel sind und g_1 und g_2 einen S'Punkt haben. (4) **windschief**, falls ihre R'Vektoren nicht parallel sind und g_1 und g_2 keinen S'punkt haben. --- **Zwei Ebenen** E_1 und E_2 sind (1) **zusammenfallend**, falls ihre Koordinatengleichungen sich nur um einen Faktor unterscheiden. (2) **echt parallel**, falls ihre N'Vektoren parallel sind und nicht (1) gilt. (3) **schneidend**, falls ihre N'Vektoren nicht parallel sind. --- **Eine Gerade** g **und eine Ebene** E sind (1) g liegt in E, falls R'Vektor(g) und N'Vektor(E) senkrecht stehen und P auf E liegt. (2) **echt parallel**, falls R'Vektor(g) und N'Vektor(E) senkrecht stehen und nicht (1) gilt. (3) **schneidend**, falls R'Vektor(g) und N'Vektor(E) nicht senkrecht stehen.
Aufstellen von Geraden- und Ebenen-gleichungen	*Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.* Gesucht **Gerade** h mit $h \parallel g$ $\hookrightarrow$ R'Vektor$(h) = \overrightarrow{v}$ Gesucht **Gerade** h mit $h \perp E$ $\hookrightarrow$ R'Vektor$(h) = \overrightarrow{n}$ Gesucht **Gerade** h mit $h \parallel E_1$ und $h \parallel E_2$ $\hookrightarrow$ R'Vektor$(h) = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ --- Gesucht **Ebene** F mit $F \parallel E$ $\hookrightarrow$ N'Vektor$(F) = \overrightarrow{n}$ Gesucht **Ebene** F mit $F \perp g$ $\hookrightarrow$ N'Vektor$(F) = \overrightarrow{v}$ Gesucht **Ebene** F mit $F \parallel g_1$ und $F \parallel g_2$, falls $g_1 \nparallel g_2$ $\hookrightarrow$ N'Vektor$(F) = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, falls $g_1 \parallel g_2$ $\hookrightarrow$ N'Vektor$(F) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_1}$ Gesucht **Ebene** F mit $F \perp E$ und $F \parallel g$ $\hookrightarrow$ N'Vektor$(F) = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v}$
Schnitt-probleme	**Punkt-Gerade** Punkt als $(x/y/z)$ einsetzen in Geradengleichung. **Punkt-Ebene** Punkt als $(x/y/z)$ einsetzen in Ebenengleichung. **Gerade-Gerade** Zeilenweises Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen Lineares Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 2 Unbestimmten t_1, t_2. **Gerade-Ebene** Zeilenweises Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung. **Ebene-Ebene** Lineares Gleichungssystem 2 Gleichungen mit 3 Unbestimmten x, y, z. **3 Ebenen** Lineares Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 3 Unbestimmten x, y, z.
Abstands-probleme	*Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.* **Punkt-Punkt** Abstand $= \lvert\overrightarrow{Q_1Q_2}\rvert$ **Punkt-Gerade** Abstand $= \dfrac{\lvert\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{PQ}\rvert}{\lvert\overrightarrow{v}\rvert}$ **Punkt-Ebene** Abstand $= \left.\dfrac{\lvert Ax+By+Cz+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\rvert_{(x/y/z)=Q}$ **Gerade-Gerade** Abstand $= \begin{cases} \dfrac{\lvert(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\rvert} & \text{, falls } \overrightarrow{v_1} \nparallel \overrightarrow{v_2} \\ \dfrac{\lvert\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{v_1}\rvert} & \text{, falls } \overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \end{cases}$ **Gerade-Ebene** Abstand $= \begin{cases} 0 & \text{, falls } \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0 \\ \left.\dfrac{\lvert Ax+By+Cz+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\rvert_{(x/y/z)=P} & \text{, falls } \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$ **Ebene-Ebene** Abstand $= \begin{cases} 0 & \text{, falls } \overrightarrow{n_1} \nparallel \overrightarrow{n_2} \\ \left.\dfrac{\lvert A_1x+B_1y+C_1z+D_1\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\right\rvert_{(x/y/z)=R_2^*} & \text{, falls } \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \end{cases}$, wobei R_2^* ein beliebiger Punkt von Ebene 2 ist.
Winkel-probleme	*Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.* **Gerade-Gerade** Winkel $= \arccos\left(\dfrac{\lvert\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{v_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{v_2}\rvert}\right)$ **Gerade-Ebene** Winkel $= \arcsin\left(\dfrac{\lvert\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}\rvert}{\lvert\overrightarrow{v}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n}\rvert}\right)$ **Ebene-Ebene** Winkel $= \arccos\left(\dfrac{\lvert\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}\right)$

8 Grenzwerte

Zahlen-folgen	Bezeichnen a_n und b_n zwei **konvergente Zahlenfolgen** mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ und sei weiter C eine Konstante, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot A$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$ --- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^s} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-s} = 0$, falls $s > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, falls $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^s \cdot q^n = 0$, falls $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
Funktionen	Eine Funktion $f(x)$ heisst **stetig** an der Stelle c, falls gilt $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ --- Für die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gelte $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B$, zudem sei D eine Konstante. c ist Element der Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, A, B und D sind Elemente von $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to c}(D \cdot f(x)) = D \cdot A$ $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, falls $B \neq 0$ $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(B)$, falls $f(x)$ stetig an der Stelle B ist. --- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ Bemerkung: x im Bogenmass! $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^s} = 0$, für $s > 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^s \cdot q^x = 0$, für $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^s \cdot q^x = \infty$, für $q > 1$

9 Differentialrechnung

Definition	**Ableitungsfunktion** $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Übliche Bezeichnungen für die Ableitungsfunktion sind $f'(x)$ oder $\frac{df(x)}{dx}$. Die Ableitungsfunktion der Ableitung $f'(x)$ heisst die **zweite Ableitung** und wird mit mit $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ oder $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ bezeichnet.

Ableitungsregeln Grundfunktionen

	$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
Potenzfunktionen	x^n	$\rightarrow$	nx^{n-1}
	x	$\rightarrow$	1
	c	$\rightarrow$	0
	$c \cdot x$	$\rightarrow$	c
	$\sqrt{x}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
	$\frac{c}{x}$	$\rightarrow$	$-\frac{c}{x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	$\rightarrow$	e^x
	e^{cx}	$\rightarrow$	$e^{cx}\cdot c$
	c^x	$\rightarrow$	$c^x \cdot \ln(c)$
Logarithmusfunktionen	$\ln(x)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{x}$
	$\log_c(x)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{x\cdot\ln(c)}$
Trigonometr. Funktionen	$\sin(x)$	$\rightarrow$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$\rightarrow$	$-\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\rightarrow$	$1+\tan^2(x)$

Ableitungsregeln Zusammensetzungen

	$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
Summenregel	$u(x) \pm v(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \pm v'(x)$
	$u(x) \pm v(x) \pm w(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \pm v'(x) \pm w'(x)$
Konstantenregeln	$c \cdot u(x)$	$\rightarrow$	$c \cdot u'(x)$
	$\frac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$\frac{u'(x)}{c}$
	c	$\rightarrow$	0
Produktregel	$u(x)\cdot v(x)$	$\rightarrow$	$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$
	$u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$	$\rightarrow$	$u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$
Quotientenregel	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow$	$\frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$
	$\frac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$-\frac{u'(x)}{c}$
	$\frac{c}{v(x)}$	$\rightarrow$	$-\frac{c\cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$u(v(x))$	$\rightarrow$	$u'(v(x))\cdot v'(x)$
	$u(v(w(x)))$	$\rightarrow$	$u'(v(w(x)))\cdot v'(w(x))\cdot w'(x)$

<table>
<tr><td>Bedeutung der Ableitung</td><td>

y-Wert = **Funktionswert** $f(x)$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow$ P. oberhalb x-Achse; $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ P. unterh. x-Achse; $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Nullstelle.

Steigung $f'(x)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ Kurve steigend; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ Kurve fallend; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ stationäre Stelle.

Modifizierte **Krümmung** $f''(x)$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ Linkskurve; $f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ Rechtskurve; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$ Kurve ungekrümmt.

Krümmung $\mathcal{K} = \dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$ **Krümmungsradius** $\mathcal{R} = \dfrac{1}{\mathcal{K}} = \dfrac{(1+f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}$

</td></tr>
<tr><td>Kurven-diskussion</td><td>

1) **Nullstellen** $f(x) \stackrel{!}{=} 0$

Eine Nullstelle heisst von Ordnung n, falls

$f(x) = f'(x) = \ldots f^{(n-1)}(x) = 0$ aber $f^{(n)}(x) \neq 0$

2) **Extrema** $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\text{gilt} \begin{cases} f''(x) < 0 & \Rightarrow \quad \textbf{lokales Maximum} \\ f''(x) > 0 & \Rightarrow \quad \textbf{lokales Minimum} \\ f''(x) = 0 & \Rightarrow \quad (*) \end{cases}$$

$(*)$ Verhalten der Ableitung $f'(x)$ für wachsende x-Werte beim Durchgang durch die untersuchte Stelle ...

$f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ über 0 zu $-$ $\Rightarrow$ lokales Maximum

$f'(x)$ wechselt das Vorzeichen von $-$ über 0 zu $+$ $\Rightarrow$ lokales Minimum

$f'(x)$ wechselt das VZ von $+$ über 0 zu $+$ nicht

oder von $-$ über 0 zu $-$ nicht $\Rightarrow$ **Terrassenpunkt**

3) **Wendepunkte** $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\text{gilt} \begin{cases} f'''(x) \neq 0 & \Rightarrow \quad \textbf{Wendepunkt} \\ f'''(x) = 0 & \Rightarrow \quad (**) \end{cases}$$

$(**)$ Verhalten der Ableitung $f''(x)$ für wachsende x-Werte beim Durchgang durch die untersuchte Stelle ...

$f''(x)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ über 0 zu $-$

oder von $-$ über 0 zu $+$ $\Rightarrow$ **Wendepunkt**

$f''(x)$ wechselt das VZ von $+$ über 0 zu $+$ nicht

oder von $-$ über 0 zu $-$ nicht $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

Sattelpunkt = **Terrassenpunkt** = Wendepunkt mit Steigung 0

</td></tr>
<tr><td>Tangente</td><td>

Tangente an der Stelle $x_1 \hookrightarrow y = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$

</td></tr>
<tr><td>Newton-verfahren</td><td>

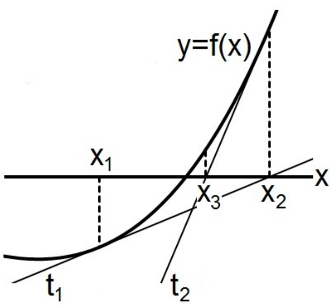
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$

Näherungsverfahren von Newton (Tangentenverfahren).

1) Wähle Startpunkt x_1

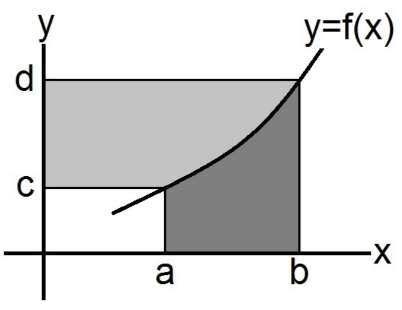
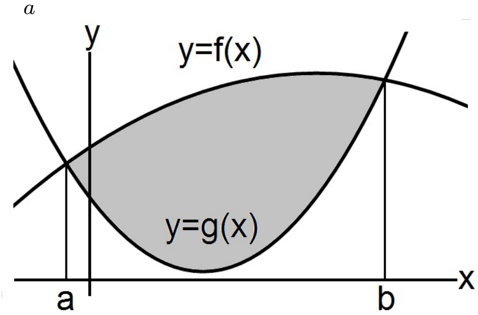
2) Berechne $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

3) Falls $x_2 = x_1$ dann ist x_2 eine Lösung von $f(x) = 0$, andernfalls verwende das erhaltene x_2 als neues x_1 und gehe zu 2).



</td></tr>
</table>

10 Integralrechnung

Definition	1) Das **unbestimmtes Integral** $\int f(x)\,dx$ ist eine Menge von Funktionen. $\int f(x)\,dx =$ Menge aller **Stammfunktionen** von $f(x)$ $=$ Menge aller Funktionen $F(x)$ mit Eigenschaft $F'(x) = f(x)$. --- Ist $F_1(x)$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist jede weitere Stammfunktion von der Form $F(x) = F_1(x) + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Man schreibt $\int f(x)\,dx = F_1(x) + C$. C heisst **Integrationskonstante**. --- 2) Das **bestimmte Integral** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist eine Zahl. a und b heissen die **Integrationsgrenzen**. $\int\limits_a^b f(x)\,dx =$ Flächeninhalt eingeschlossen von unten durch die x-Achse von oben durch die Kurve $y = f(x)$ von links durch die Gerade $x = a$ und von rechts durch die Gerade $x = b$. --- Flächenstücke unter der x-Achse haben **negatives Vorzeichen**. Ebenso wechselt das Vorzeichen, wenn linke und rechte **Grenze vertauscht** sind.
Hauptsatz	**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** Bezeichne $F(x)$ irgend eine Stammfunktion von $f(x)$, also $F(x) \in \int f(x)\,dx$ (unbestimmtes Integral). Dann gilt $\int\limits_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (bestimmtes Integral). Der Hauptsatz führt somit das bestimmte Integral auf das unbestimmte Integral zurück!
Zusammen- setzen	**Unterteilen** $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ **Vertauschte Grenzen** $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ **Leeres Integral** $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$
Anwend- ungen	**Fläche** zwischen Kurve und x-Achse $A = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ **Volumen** bei Rotation um x-Achse $V_x = \pi \cdot \int\limits_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int\limits_a^b f(x)^2\,dx$ Zwischen zwei Kurven . . . **Fläche** $A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ . . . **Volumen** bei Rotation um x-Achse $V_x = \pi \cdot \int\limits_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx$ 

Anwendungen (Fortsetzung)	**Volumen** bei Rotation um y-Achse $V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \cdot dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x)\,dx$ **Bogenlänge** $\ell = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ **Oberfläche** bei Rotation um x-Achse $O_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ **Oberfläche** bei Rotation um y-Achse $O_y = 2\pi \cdot \int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Integrationsregeln Grundfunktionen

	$f(x)$		$F(x)$
Potenzfunktionen	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\rightarrow$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
	$\frac{c}{x} = c \cdot x^{-1}$	$\rightarrow$	$c \cdot \ln(\|x\|)$
	c	$\rightarrow$	cx
	cx	$\rightarrow$	$\frac{c \cdot x^2}{2}$
	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\rightarrow$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2x^{3/2}}{3}$
	$\frac{c}{x^2} = c \cdot x^{-2}$	$\rightarrow$	$\frac{c \cdot x^{-1}}{-1} = -\frac{c}{x}$
Exponentialfunktionen	e^x	$\rightarrow$	e^x
	e^{cx}	$\rightarrow$	$\frac{e^{cx}}{c}$
	e^{-x}	$\rightarrow$	$\frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$
	c^x	$\rightarrow$	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
	$x \cdot e^{cx}$	$\rightarrow$	$\frac{cx-1}{c^2} \cdot e^{cx}$
	$x \cdot c^x$	$\rightarrow$	$\frac{x\ln(c)-1}{(\ln(c))^2} \cdot c^x$
Logarthmenfunktionen	$\ln(x)$	$\rightarrow$	$x \cdot (\ln(x)-1)$
	$\log_c(x)$	$\rightarrow$	$\frac{x \cdot (\ln(x)-1)}{\ln(c)}$
Trigono. Funktionen	$\sin(x)$	$\rightarrow$	$-\cos(x)$
	$\cos(x)$	$\rightarrow$	$\sin(x)$
	$\tan(x)$	$\rightarrow$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$
Normalverteilung	normalpdf(x, μ, σ)	$\rightarrow$	normalcdf$(-1\mathrm{E}99, x, \mu, \sigma)$

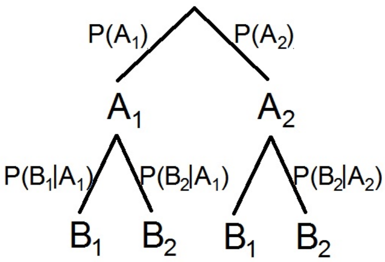
Integrationsregeln Zusammensetzungen

	$f(x)$		$F(x)$
Summenregel	$u(x) \pm v(x)$	$\rightarrow$	$U(x) \pm V(x)$
Summenregel	$u(x) \pm v(x) \pm w(x)$	$\rightarrow$	$U(x) \pm V(x) \pm W(x)$
Konstantenregeln	$c \cdot u(x)$	$\rightarrow$	$c \cdot U(x)$
	$\frac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$\frac{U(x)}{c}$
	c	$\rightarrow$	cx
Lin. Kettenregel	$u(c_1x + c_2)$	$\rightarrow$	$\frac{U(c_1x+c_2)}{c_1}$

11 Kombinatorik

Permutationen	$\boxed{1}$ Wieviele verschiedene Worte lassen sich aus n Zeichen unter Verwendung aller n Zeichen bilden, wenn **alle Zeichen verschieden** sind? $\hookrightarrow n!$ $\quad$ n Fakultät $= n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ $\boxed{2}$ Wieviele verschiedene Worte lassen sich aus n Zeichen unter Verwendung aller n Zeichen bilden, wenn jeweils k_1, k_2 ,..., k_s **Zeichen identisch** sind? $\hookrightarrow \dfrac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_s!}$
Variationen	$\boxed{1}$ Wieviele verschiedene Worte der Länge s lassen sich aus einem Zeichensatz von n verschiedenen Zeichen bilden? Bei erlaubter **Mehrfachverwendung** der Symbole $\hookrightarrow n^s$ $\boxed{2}$ Wieviele verschiedene Worte der Länge s lassen sich aus einem Zeichensatz von n verschiedenen Zeichen bilden? Bei **Einfachverwendung** der Symbole $\hookrightarrow \dfrac{n!}{(n-s)!}$ $\quad$ es gilt $\dfrac{n!}{(n-s)!} = \dbinom{n}{s} \cdot s!$
Kombinationen	$\boxed{1}$ Auf wieviele Arten kann man aus n Objekten s aussuchen? Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge des Aussuchens an. $\hookrightarrow \dbinom{n}{s}$ $\quad$ Binomialkoeffizient $\dbinom{n}{s} = \dfrac{n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-s+1)}{s!} = \dfrac{n!}{(n-s)! \cdot s!}$ $\boxed{2}$ Auf wieviele Arten kann man aus n Objekten s aussuchen? Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge des Aussuchens an. Die Objekte dürfen jetzt aber auch **mehrfach gewählt** werden! $\hookrightarrow \dbinom{n+s-1}{s}$

12 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Begriffe	**Ereignisse** = **Teilmengen** der **Grundmenge** Ω. Ω heisst das **sichere Ereignis**, $\phi = \{\}$ heisst das **unmögliche Ereignis**. Das **Gegenereignis** oder Komplement eines Ereignisses A ist $\overline{A} = \Omega \backslash A$. **Elementarereignisse** sind einelementige Teilmengen der Grundmenge Ω. Die Funktion P ordnet jedem Ereignis seine **Wahrscheinlichkeit** zu.
Eigenschaften von P	$\boxed{1}$ $\mathsf{P}(A) \geq 0$ $\boxed{2}$ $\mathsf{P}(\phi) = 0$ $\boxed{3}$ $\mathsf{P}(\Omega) = 1$ $\boxed{4}$ **Additivität** $P(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ $\boxed{5}$ $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ $\boxed{6}$ **Gegenereignis** $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$ $\boxed{7}$ **Inklusions-Exklusions-Formel** $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3)$ $-\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_3) - \mathsf{P}(A_2 \cap A_3)$ $+\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
Laplace-Definition	**Laplacedefinition der Wahrscheinlichkeit** Voraussetzung: Alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich. Dann rechnet sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A als $\mathsf{P}(A) = \frac{\lvert A \rvert}{\lvert \Omega \rvert} = \frac{\text{günstige Fälle für } A}{\text{mögliche Fälle}}$
Baumdiagramm	**Die 3 Pfadregeln** $\boxed{1}$ Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade werden multipliziert. $\boxed{2}$ Wahrscheinlichkeiten verschiedender Pfade werden addiert. $\boxed{3}$ Alle Äste unterhalb eines Knotens addieren sich zu Wahrscheinlichkeit 1. 
Bedingte Wahrscheinlichkeit	**Bedingte Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(A \mid B)$ = Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintrifft, wenn man schon weiss, dass Ereignis B eintrifft. $P(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$ A und B heissen **unabhängig**, falls $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$. Dies hat nämlich zur Folge $\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A \mid \overline{B}) = \mathsf{P}(A)$ (falls $0 < \mathsf{P}(B) < 1$) und $\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B \mid \overline{A}) = \mathsf{P}(B)$ (falls $0 < \mathsf{P}(A) < 1$)

Multipli-kations- und Additions-satz	**Multiplikationssatz** $P(A \cap B) = \mathsf{P}(A \mid B) \cdot \mathsf{P}(B)$ Für **unabhängige Ereignisse** gilt sogar $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$ **Additionssatz** $P(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$ Für **unvereinbare Ereignisse** gilt sogar $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ --- Sei Ω in die unvereinbaren Ereignisse A_j zerlegt, also $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$. Für jedes Ereignis B gelten dann **Formel von der totalen (= unbedingten) Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(B) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)$ **Formel von Bayes** $\mathsf{P}(A_j \mid B) = \dfrac{\mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{P}(B \mid A_j) \cdot \mathsf{P}(A_j)}$ Die beiden Formeln ergeben sich auch direkt am Baumdiagramm!
Diskrete Zufalls-variablen	Eine **diskrete Zufallsvariable** X nimmt die Werte x_k mit den Wahrscheinlichkeiten p_k an $(1 \leq k \leq n)$, man spricht von der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X. **Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \sum\limits_{a \leq x_k \leq b} p_k$ **Erwartungswert** $\mu = \mathsf{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k \cdot p_k)$ **Varianz** $\sigma^2 = \mathsf{V}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} ((x_k - \mu)^2 \cdot p_k)$ **Standardabweichung** $\sigma = \mathsf{S}(X) = \sqrt{\mathsf{V}(X)}$ **Verschiebungssatz** $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$ --- **Erwartungswertoperator** $\mathsf{E}(g(X)) = \sum\limits_{k=1}^{n} (g(x_k) \cdot p_k)$
Stetige Zufalls-variablen	Eine **stetige Zufallsvariable** X hat die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** $f(x)$. **Wahrscheinlichkeit** $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ Da $P(X = a) = 0$ für eine stetige Zufallsvariable gilt, folgt dass auch $\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a \leq X \leq b)$ gilt. **Erwartungswert** $\mu = \mathsf{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$ **Varianz** $\sigma^2 = \mathsf{V}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\,dx$ **Standardabweichung** $\sigma = \mathsf{S}(X) = \sqrt{\mathsf{V}(X)}$ **Verschiebungssatz** $\mathsf{V}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$ --- **Erwartungswertoperator** $\mathsf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$

<table>
<tr><td>Binomial-verteilung</td><td>Charakterisierung $\hookrightarrow$ Ein Versuch mit zwei mögliche Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit p und Niete mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) wird n mal unabhängig wiederholt. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der in den n Versuchen erzielten Treffer. X ist eine diskrete Zufallsvariable.
Wahrscheinlichkeit für k Treffer $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\mathsf{binompdf}(n,p,k)$
Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X\geq 1)=1-(1-p)^n$
Wahrscheinlichkeit höchstens b Treffer $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X\leq b)=\mathsf{binomcdf}(n,p,b)$
Wahrscheinlichkeit mindestens a Treffer $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X\geq a)=1-\mathsf{binomcdf}(n,p,a-1)$
Wahrscheinlichkeit für zwischen a und b Treffer
$\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(a\leq X\leq b)=\mathsf{binomcdf}(n,p,b)-\mathsf{binomcdf}(n,p,a-1)$
Erwartungswert $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X)=\mu=n\cdot p$
Varianz $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X)=\sigma^2=n\cdot p\cdot(1-p)$
Standardabweichung $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X)=\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$</td></tr>
<tr><td>Geo-metrische Verteilung</td><td>Charakterisierung $\hookrightarrow$ Ein Versuch mit zwei mögliche Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit p und Niete mit Wahrscheinlichkeit $1-p$) wird so lange wiederholt, bis der erste Treffer erscheint. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl gebrauchter Versuche bis zum ersten Treffer. X ist eine diskrete Zufallsvariable.
Wahrscheinlichkeit für k gebrauchte Versuche $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$
Erwartungswert $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X)=\mu=\frac{1}{p}$
Varianz $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X)=\sigma^2=\frac{1-p}{p^2}$
Standardabweichung $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X)=\sigma=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$</td></tr>
<tr><td>Hypergeo-metrische verteilung</td><td>Charakterisierung $\hookrightarrow$ Aus einer Urne, enthaltend w weisse und s schwarze Kugeln, werden (ohne Zurücklegen) n Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der weissen Kugeln unter den n gezogenen. X ist eine diskrete Zufallsvariable.
Wahrscheinlichkeit für k weisse Kugeln $\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(X=k)=\dfrac{\binom{w}{k}\cdot\binom{s}{n-k}}{\binom{w+s}{n}}$
Erwartungswert $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X)=\mu=\frac{n\cdot w}{w+s}$
Varianz $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X)=\sigma^2=\frac{(w+s-n)\cdot n\cdot w\cdot s}{(w+s-1)\cdot(w+s)^2}$
Standardabweichung $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X)=\sigma=\sqrt{\frac{(w+s-n)\cdot n\cdot w\cdot s}{(w+s-1)\cdot(w+s)^2}}$</td></tr>
</table>

Normalverteilung

Zentraler Grenzwertsatz $\hookrightarrow$ Ein Versuch (Zufallsvariable X) wird n-fach unabhängig wiederholt. Die X_i für $1 \leq i \leq n$ seien die erzielten Resultate.

1) Die **Summe** $\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist für grosses n annähernd normalverteilt

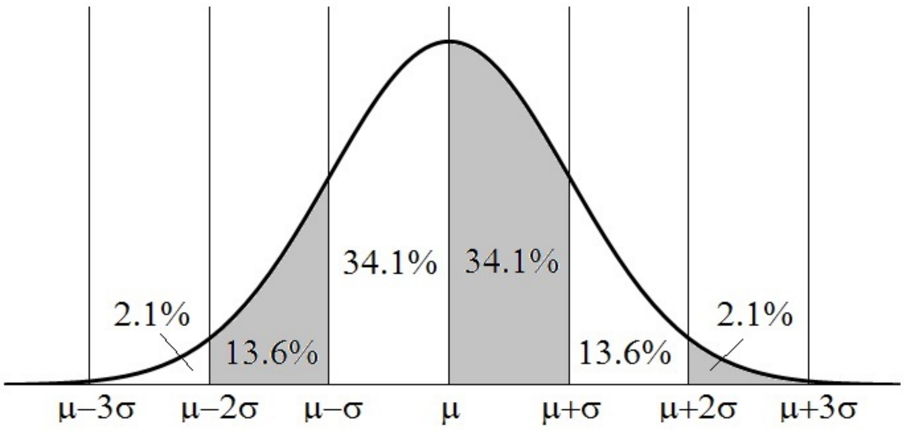
mit $\mu = n \cdot \mathsf{E}(X)$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot \mathsf{V}(X)}$.

2) Der **Mittelwert** $\overline{X}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ ist für grosses n annähernd normalverteilt

mit $\mu = \mathsf{E}(X)$ und $\sigma = \sqrt{\dfrac{\mathsf{V}(X)}{n}}$.

Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ ist die

Gausssche Glockenkurve $\mathsf{normalpdf}(x, \mu, \sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



$\mathsf{normalcdf}(a, x, \mu, \sigma)$ (für beliebiges a), ist eine **Stammfunktion** von $\mathsf{normalpdf}(x, \mu, \sigma)$.

Für eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$-verteilte Zufallsvariable X gilt

Wahrscheinlichkeit

$\hookrightarrow$ $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \mathsf{normalpdf}(x, \mu, \sigma)\, dx = \mathsf{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$

Bemerkung: Da $\mathsf{P}(X = a) = P(X = b) = 0$ ist, folgt $\mathsf{P}(a < X < b) = \mathsf{P}(a \leq X \leq b)$

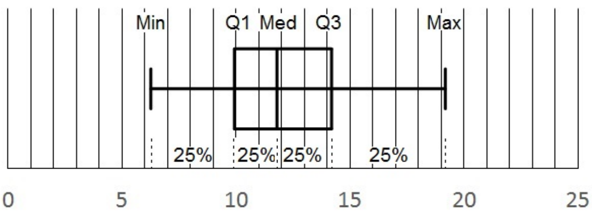
Bemerkung: Für den TR gilt $-\infty = -1\mathrm{E}99$ bzw. $\infty = 1\mathrm{E}99$

Erwartungswert $\hookrightarrow$ $\mathsf{E}(X) = \mu$

Varianz $\hookrightarrow$ $\mathsf{V}(X) = \sigma^2$

Standardabweichung $\hookrightarrow$ $\mathsf{S}(X) = \sigma$

13 Beschreibende Statistik

<table>
<tr>
<td>Kennwerte schätzen</td>
<td>
An einer Stichprobe treten für das Merkmal X die k Werte x_i $(i = 1, \ldots, k)$ mit den Häufigkeiten n_i auf.
Die Anzahl Einzelresultate $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ heisst der Umfang der Stichprobe.
Es wird angenommen, dass die Stichprobe durch zufällige Wahl aus der Grundgesamtheit gezogen wurde. Die Stichprobe heisst dann repräsentativ für die Grundgesamtheit.
<hr>
Aus der Messung lassen sich folgende Kennwerte für das Merkmal X in der Grundgesamtheit schätzen:
$\boxed{1}$ Erwartungswert E(X) $\hookrightarrow \overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i \cdot n_i)}{n}$
$\boxed{2}$ Varianz V(X) $\hookrightarrow s^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} ((x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i)}{n-1}$
$\boxed{3}$ Standardabweichung S(X) $\hookrightarrow s = \sqrt{s^2}$
$\boxed{4}$ q-Quantil
$\hookrightarrow$ (1) Ordne die Resultate aufsteigend (Rang 1 bis Rang n).
(2) Berechne $q \cdot (n+1)$ und zerlege das Resultat in ganzzahlingen Teil g und Hinterkommateil r.
(3) q-Quantil = 'Messwert Rang g' $+ r \cdot$ ('Messwert Rang $g+1$' $-$ 'Messwert Rang g')
$\boxed{5}$ Der Median ist das 0.5-Quantil.
$\boxed{6}$ Das erste Quartil (=erstes Viertel) ist das 0.25-Quantil.
$\boxed{7}$ Das dritte Quartil (=drittes Viertel) ist das 0.75-Quantil.
$\boxed{8}$ Im Boxplot zeichnet man den kleinsten Messwert (Min), das erste Quartil (Q1), den Median (Med), das dritte Quartil (Q3) und den grössen Messwert (Max) ein. Der Boxplot gibt einen groben Überblick über die Verteilung der Messresultate.


</td>
</tr>
<tr>
<td>Lineare Regression</td>
<td>
Gegeben sind die Datenpaare (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots n$.
Den besten* linearen Zusammenhang $\hat{y}(x) = mx + b$ findet man, indem man m und b aus dem folgenden linearen Gleichungssystem ermittelt.
$\left| \begin{array}{rcl} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \cdot m + (\sum\limits_{i=1}^{n} 1) \cdot b &=& \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2) \cdot m + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \cdot b &=& \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) \end{array} \right|$
* in dem Sinne, dass die Summe der quadratischen Abweichungen $\sum\limits_{i=1}^{n} (\hat{y}(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.
</td>
</tr>
</table>

14 Das Griechische Alphabet

Die 24 Griechischen Buchstaben

	Name	gross	klein	♩		Name	gross	klein	♩
1	Alpha	A	α	a	13	Nü	N	ν	n
2	Beta	B	β	b	14	Xi	Ξ	ξ	x
3	Gamma	Γ	γ	g	15	Omikron	O	o	o
4	Delta	Δ	δ	d	16	Pi	Π	π	p
5	Epsilon	E	ϵ	e	17	Rho	P	ρ	r(h)
6	Zeta	Z	ζ	z	18	Sigma	Σ	σ	s
7	Eta	H	η	ē	19	Tau	T	τ	t
8	Theta	Θ	θ	th	20	Ypsilon	Y	υ	y oder u
9	Iota	I	ι	i	21	Phi	Φ	ϕ	ph
10	Kappa	K	κ	k	22	Chi	X	χ	ch
11	Lambda	Λ	λ	l	23	Psi	Ψ	ψ	ps
12	Mü	M	μ	m	24	Omega	Ω	ω	ō

15 Mathematische Symbole

Mathematische Symbole

Symbol	Bedeutung	Bereich
π	Kreiszahl 3.1415926535...	
e	Eulersche Zahl 2.7182818284...	
$\wedge$	und	Logik
$\vee$	oder	Logik
$\neg$	nicht	Logik
$\forall$	für alle	Logik
$\exists$	es exisitert ein	Logik
$\cup$	vereinigt	Mengenlehre
$\cap$	geschnitten	Mengenlehre
$\setminus$	ohne	Mengenlehre
$\in$	ist Element von	Mengenlehre
$\subseteq$	ist Teilmenge von	Mengenlehre
$\supseteq$	ist Obermenge von	Mengenlehre
ϕ	Leere Menge	Mengenlehre
$\sum$	Summe	Algebra
$\prod$	Produkt	Algebra
Δ	Differenz	Algebra
!	Fakultät	Kombinatorik
$\binom{n}{s}$	'n tief s', Binomialkoeffizient	Kombinatorik